

2° (пребројива или σ адитивност) кад год је A_1, A_2, \dots низ међусобно дисјунктних скупова из \mathcal{A} такав да је $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ имамо

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Узимајући да је $A_n = \emptyset$ за $n \geq 3$, закључујемо да је свака мера адитивна, тј. она је и коначно адитивна мера. Наравно, обрнуто не мора да важи.

У следећим примерима X је произвољан скуп. Такође, за $A \subset X$, са χ_A означавамо карактеристичну функцију скупа A :

$$\chi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

ПРИМЕР 3.1. За $A \subset X$ дефинишемо $\mu(A)$ као број елемената скупа A ако је A коначан, и $\mu(A) = +\infty$ ако је A бесконачан скуп.

ПРИМЕР 3.2. Нека је a фиксиран елемент скупа X . За $A \subset X$ дефинишемо

$$\delta_a(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}.$$

Остављамо читаоцу да провери да су овим задане мере на алгебри свих подскупова скупа X . Прву називамо бројачком мером на скупу X , а другу Dirac³-овом мером у тачки a . Приметимо да је $\delta_a(A) = \chi_A(a)$, а ако је $X = \mathbb{R}$, тада је δ_a управо Lebesgue-Stieltjes-ова мера $\mu_{\chi_{(a, +\infty)}}$.

Наравно, свака мера има сва својства коначно адитивних мера. Наведимо сада својства мера на алгебри \mathcal{A} која зависе од пребројиве адитивности.

3° (непрекидност одоздо) Ако $A_n \uparrow A$, при чему $A \in \mathcal{A}$ и $A_n \in \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.

Пре свега, низ $\{\mu(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ је растући на основу монотоности коначно адитивних мера. Зато, ако је $\mu(A_n) = +\infty$ за неко n , онда је $\mu(A) = +\infty$ и $\mu(A_m) = +\infty$ за свако $m \geq n$, па је у том случају тврђење тачно. У преосталом случају ($\mu(A_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$) примењујемо пребројиву адитивност и разлагање $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$, где је $A_0 = \emptyset$, што даје

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n [\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu(A_n) - \mu(A_0)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

4° (условна непрекидност одозго) Ако $A_n \downarrow A$, при чему $A_n \in \mathcal{A}$ за $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A_1) < +\infty$, онда $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

Прво, из монотоности коначно адитивних мера следи да је низ $\{\mu(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ опадајући, како је $\mu(A_1) < +\infty$ имамо $\mu(A_n) < \infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\mu(A) < +\infty$. Из претпоставки следи да $A_1 \setminus A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A$, при

³ Дирак–Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984)